ENS de Lyon — Algèbre 1

L3 — 2023-2024

Devoir Maison 2

À rendre au plus tard le **mardi 19 décembre à 15h45** au début du TD (ou par mail à `baptiste.peaucelle@ens-lyon.fr` avec comme objet `DM algèbre 1`). Tout retard sera sanctionné.

On pourra utiliser le résultat suivant sans démonstration :

— Deux représentations (V,ρ) et (V',ρ') sont isomorphes si et seulement si $\chi_V = \chi_{V'}$.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes
mais ne sont pas indépendantes de la partie 1.

Partie 1 – Carrés symétrique et alterné, et représentations

Soit G un groupe fini. Soit (V,ρ) une représentation complexe de G, de caractère χ_V.

On définit le carré symétrique $\mathrm{Sym}^2(V)$ et le carré alterné $\Lambda^2(V)$ de V par

$$\mathrm{Sym}^2(V) := (V\otimes V)/\operatorname{Vect}(x\otimes y - y\otimes x)_{x,y\in V} \quad \text{et} \quad \Lambda^2(V) := (V\otimes V)/\operatorname{Vect}(x\otimes x)_{x\in V}.$$

Pour x, $y\in V$, on note xy (*resp.* $x\wedge y$) l'image de $x\otimes y$ dans $\mathrm{Sym}^2(V)$ (*resp.* dans $\Lambda^2(V)$). On rappelle que si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de V, alors des bases de $\mathrm{Sym}^2(V)$ et $\Lambda^2(V)$ sont données par

$$(e_ie_j)_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \quad \text{et} \quad (e_i\wedge e_j)_{1\leqslant i<j\leqslant n},$$

et on a un isomorphisme $V\otimes V\cong \mathrm{Sym}^2(V)\oplus\Lambda^2(V)$ donné par les deux projections canoniques.

1. **(a)** Rappeler comment munir $V\otimes V$ d'une structure de représentation de G à partir de celle de V.

   (b) Montrer que l'isomorphisme $V\otimes V\cong \mathrm{Sym}^2(V)\oplus\Lambda^2(V)$ induit des représentations de G sur $\mathrm{Sym}^2(V)$ et $\Lambda^2(V)$ telles que cet isomorphisme est un isomorphisme de représentations (on prendra soin de définir convenablement les morphismes que l'on écrira).

   On note $\rho_{\mathrm{Sym}^2(V)}$ et $\rho_{\Lambda^2(V)}$ les morphismes de groupes associés à ces représentations.

2. **(a)** Soit $g\in G$. Construire une base de vecteurs propres de $\rho_{\mathrm{Sym}^2(V)}(g)$ et $\rho_{\Lambda^2(V)}(g)$ en fonction d'une base de vecteurs propres de $\rho(g)$.

   (b) En déduire une expression des caractères $\chi_{\mathrm{Sym}^2(V)}(g)$ et $\chi_{\Lambda^2(V)}(g)$ en fonction de $\chi_V(g)$ et $\chi_V(g^2)$.

3. Soit $\mathrm{Bil}(V\times V)$ l'espace des formes bilinéaires sur $V\times V$. On le munit d'une structure de représentation par

$$\forall g\in G,\ \forall\varphi\in\mathrm{Bil}(V\times V),\ \forall v,w\in V,\ (g\cdot\varphi)(v,w) := \varphi(g^{-1}v, g^{-1}w).$$

   Montrer que l'isomorphisme $\mathrm{Bil}(V\times V)\cong (V\otimes V)^*$ est un morphisme de représentations.

On note $S(V \times V)$ et $A(V \times V)$ les sous-espaces des formes bilinéaires symétriques et alternées sur $V \times V$. Tous les morphismes du diagramme ci-dessous sont alors des morphismes de représentations (on ne demande pas de le montrer).

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Bil}(V \times V) & = & S(V \times V) & \oplus & A(V \times V) \\
\wr\!\| & & \wr\!\| & & \wr\!\| \\
(V \otimes V)^* & \cong & \mathrm{Sym}^2(V)^* & \oplus & \Lambda^2(V)^*
\end{array}$$

Partie 2 – Formes bilinéaires invariantes

On suppose dans cette partie que la représentation (V, ρ) **est irréductible** et on note
$$\varepsilon_2(V) := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2).$$

4. Montrer que la représentation V^* est irréductible.

5. Montrer que $\dim\left((V \otimes V)^G\right) \leqslant 1$.

6. Exprimer $\varepsilon_2(V)$ en fonction de $\dim\left(\mathrm{Sym}^2(V)^G\right)$ et $\dim\left(\Lambda^2(V)^G\right)$ et en déduire que $\varepsilon_2(V) \in \{-1, 0, 1\}$.

7. Montrer alors que l'on a trois cas possibles :

- **(i)** $\varepsilon_2(V) = 1$ si et seulement s'il n'existe aucune forme bilinéaire alternée sur $V \times V$ qui est non nulle et invariante par G, mais une droite de formes bilinéaires symétriques sur $V \times V$ qui sont toutes invariantes par G ;
- **(ii)** $\varepsilon_2(V) = -1$ si et seulement s'il n'existe aucune forme bilinéaire symétrique sur $V \times V$ qui est non nulle et invariante par G, mais une droite de formes bilinéaires alternées sur $V \times V$ qui sont toutes invariantes par G ;
- **(iii)** $\varepsilon_2(V) = 0$ si et seulement s'il n'existe aucune forme bilinéaire sur $V \times V$ qui est non nulle et invariante par G.

Partie 3 – Critère de réalisabilité d'une représentation sur $\mathbb{R}$

On suppose dans cette partie que la représentation (V, ρ) **est irréductible.**

On dit que χ_V est *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ si pour tout $g \in G$, $\chi_V(g) \in \mathbb{R}$.

8. **(a)** Montrer que χ_V est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si et seulement si V et V^* sont isomorphes en tant que représentations de G.

(b) En déduire que χ_V est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée $\varphi \in \mathrm{Bil}(V \times V)$ invariante par G.

On dit que (V, ρ) est *réalisable sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une base $\mathbf{e}$ de V telle que pour tout $g \in G$, $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\rho(g)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

9. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base quelconque de V. On considère l'unique forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ telle que pour tout i, $j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$.

(a) Construire, par un procédé de moyenne, une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique φ_0 qui soit invariante sous l'action de G sur $\mathrm{Bil}(V \times V)$.

(b) Montrer que $\ker(\varphi_0)$ est une sous-représentation de V.

(c) On suppose que (V, ρ) est réalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée invariante par G.

10. On va prouver la réciproque du résultat précédent. On suppose qu'il existe une forme bilinéaire symétrique G-invariante non dégénérée $\varphi \in S(V \times V)^G$. On considère un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V qui soit G-invariant.

(a) On admet que pour tout vecteur $v \in V$, il existe un unique vecteur $f(v) \in V$ tel que pour tout $w \in V$, $\varphi(v, w) = \langle f(v), w \rangle$ (c'est le théorème de représentation de Riesz). Montrer que f est antilinéaire (pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et v, $w \in V$, $f(\lambda v + w) = \overline{\lambda} f(v) + f(w)$) et bijective. Montrer de plus que $\langle f \circ f(v), w \rangle = \langle f(w), f(v) \rangle$.

(b) Montrer que f est un endomorphisme de (V, ρ) en tant que représentation **réelle**, et en déduire que $f \circ f$ est un endomorphisme de (V, ρ) en tant que représentation **complexe**, puis que $f \circ f = \lambda \, \mathrm{Id}_V$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) L'endomorphisme réel f est donc diagonalisable de valeurs propres $\sqrt{\lambda}$ et $-\sqrt{\lambda}$ car annulé par $X^2 - \lambda$ (on ne demande pas de le montrer). Montrer que les deux espaces propres de f ont la même dimension en tant que $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

(d) On note $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une $\mathbb{R}$-base de $\ker(f - \sqrt{\lambda} \, \mathrm{Id}_V)$. Conclure en montrant que c'est une $\mathbb{C}$-base de V et que pour tout $g \in G$ la matrice de $\rho(g)$ dans cette base est à coefficients réels.